La science quantique

Une vision singulière

IX) Qubits

P.A. Besse

Qubits =
Système à deux états
avec des paramètres contrôlables
et qui peuvent interagir

PAB

Système à deux états

Considérons un système donné par deux modes propres:

$$|\varphi_0\rangle = |\uparrow\rangle \qquad\qquad |\varphi_1\rangle = |\downarrow\rangle$$

<u>Etat superposé:</u>

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\cdot|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi}\cdot|\downarrow\rangle \qquad\qquad \langle\psi||\psi\rangle = 1$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{aligned} &\theta \in [0\,,\pi] \\ &\varphi \in [0\,,2\pi] \end{aligned}$$

Exemples de Qubits

Polarisation

Qubits optiques

$$\begin{pmatrix} |H\rangle \\ |V\rangle \end{pmatrix}$$

Résonateur LC anharmoniques

Transmons

$$\begin{pmatrix} |g\rangle \\ |e\rangle \end{pmatrix}$$

Spins électroniques

Spin quits

$$\begin{pmatrix} |U\rangle \\ |D\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\uparrow\rangle \\ |\downarrow\rangle \end{pmatrix}$$

• • •

PAB

Matrices de Pauli

Spin en Z

Vecteurs propres:

$$|\varphi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres:

$$\lambda_0 = +1 \qquad \lambda_1 = -1$$

Projecteurs:

$$P_0 \equiv |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \equiv |\varphi_1\rangle \cdot \langle \varphi_1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mesure du spin Z

$$\boxed{\sigma_Z \equiv \sum \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Spin en X

Vecteurs propres:

$$|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres:

$$\lambda_0 = +1 \qquad \lambda_1 = -1$$

Projecteurs:

$$P_0 \equiv |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \equiv |\varphi_1\rangle \cdot \langle \varphi_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Mesure du spin X

$$\boxed{\sigma_X \equiv \sum \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Spin en Y

Vecteurs propres:

$$|\varphi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Valeurs propres:

$$\lambda_0 = +1 \qquad \lambda_1 = -1$$

Projecteurs:

$$P_0 \equiv |\varphi_0\rangle \cdot \langle \varphi_0| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \equiv |\varphi_1\rangle \cdot \langle \varphi_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

Mesure du spin Y

$$\boxed{\sigma_Y \equiv \sum \lambda_i \cdot P_i = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}}$$

Matrice hermitienne 2x2

Matrice hermitienne $M = M^{\dagger} \quad \Rightarrow M_{ij} = M_{ji}^{*}$

Base de décomposition: $\begin{pmatrix} \mathbb{1} & \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z \end{pmatrix}$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} a_0 + a_z & a_x - ia_y \\ a_x + ia_y & a_0 - a_z \end{pmatrix} = a_0\,\mathbb{1} + a_x\sigma_x + a_y\sigma_y + a_z\sigma_z}$$

avec a_0 et a_x, a_y, a_z réels

$$\boxed{M = a_0\,\mathbb{1} + \frac{\hbar\Omega}{2}\cdot\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right) \qquad avec \qquad \Omega \equiv \frac{2|a|}{\hbar}}$$

Propriétés des matrices de Pauli

Carrés $\sigma_x^{\,2}=1$ $\sigma_y^{\,2}=1$ $\sigma_z^{\,2}=1$

Traces: $Tr(\sigma_x)=Tr(\sigma_y)=Tr(\sigma_z)=0$

$$Tr(\sigma_x^2)=Tr(\sigma_y^2)=Tr(\sigma_z^2)=Tr(1)=2$$

$$Tr(\sigma_x\sigma_y)=Tr(\sigma_y\sigma_z)=Tr(\sigma_z\sigma_x)=0$$

Commutateurs: $\left[\sigma_x,\sigma_y\right]=2i\cdot\sigma_z$ $\left[\sigma_y,\sigma_z\right]=2i\cdot\sigma_x$ $\left[\sigma_z,\sigma_x\right]=2i\cdot\sigma_y$

$\left[A,B\right]=AB-BA$

Anti-commutateurs: $\left\{\sigma_x,\sigma_y\right\}=0$ $\left\{\sigma_y,\sigma_z\right\}=0$ $\left\{\sigma_z,\sigma_x\right\}=0$

$\left\{A,B\right\}=AB+BA$

Exponentielle

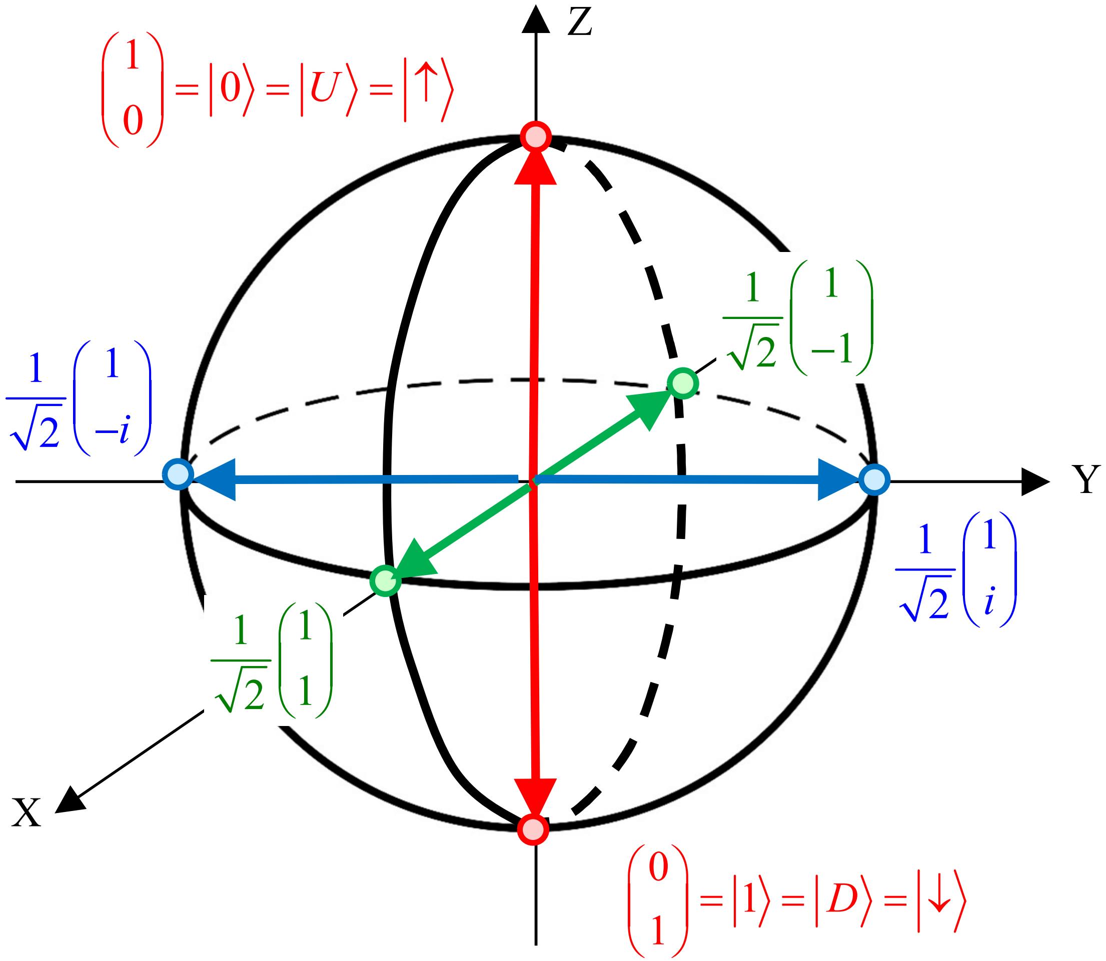
$$e^{i\cdot\left(a_0\cdot 1+\frac{\hbar\Omega}{2}\cdot\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)}=e^{i\cdot a_0\cdot 1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\hbar\Omega}{2}\right)\cdot 1+i\sin\left(\frac{\hbar\Omega}{2}\right)\cdot\left(\vec{n}\cdot\vec{\sigma}\right)\right)$$

Qubits:

Sphère de Bloch

(ou de Poincaré)

Sphère de Bloch: axes principaux



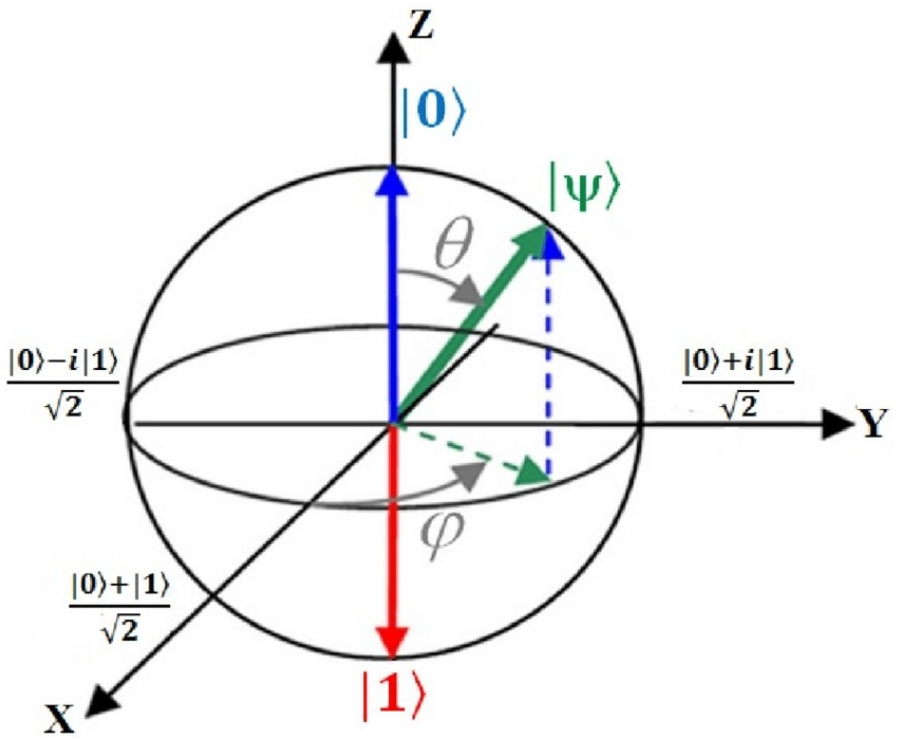
Sphère de Bloch

<u>Etat superposé:</u> $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$ $\qquad \langle\psi||\psi\rangle = 1$

$$\langle\sigma_z\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \cos\theta$$

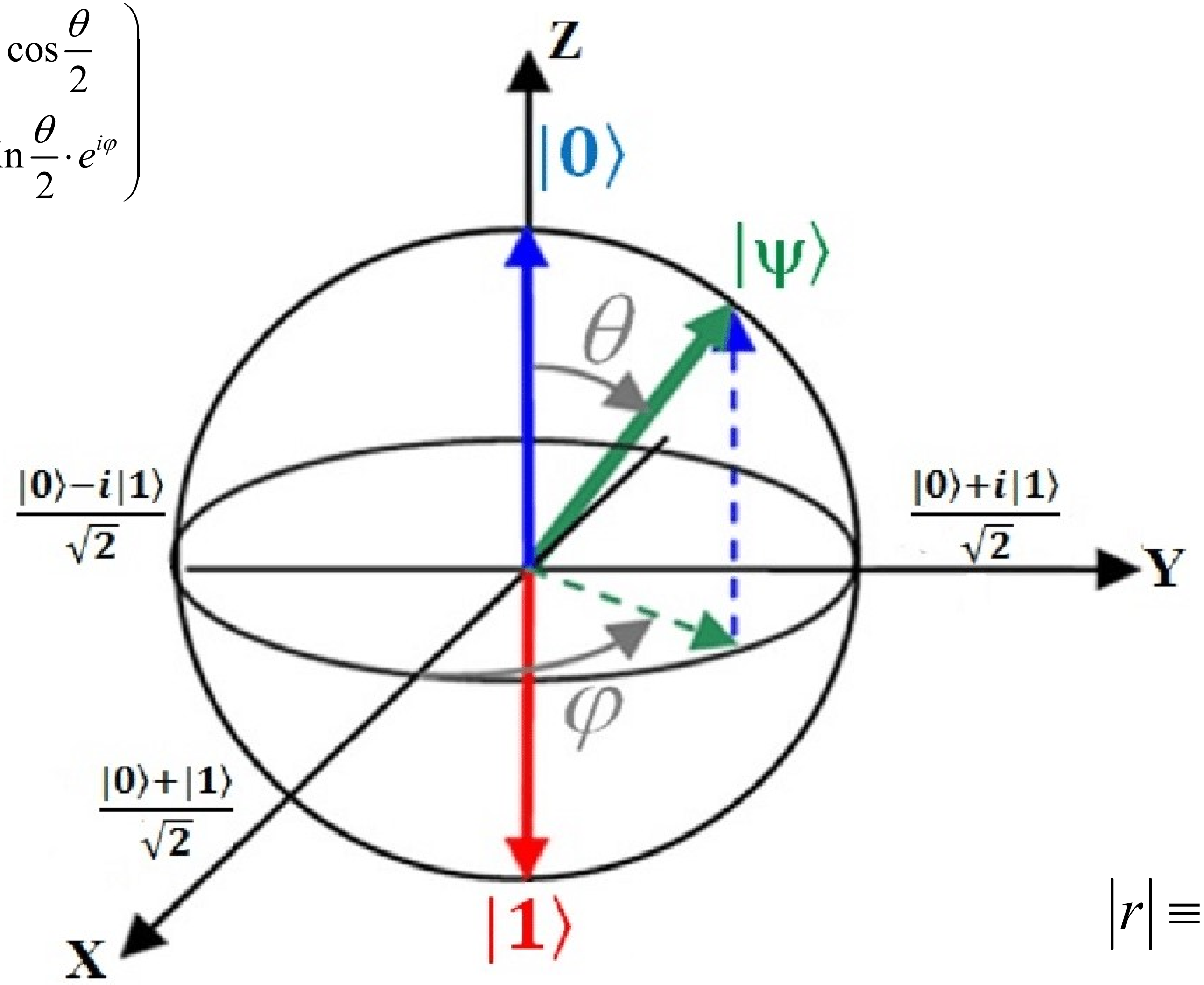
$$\langle\sigma_x\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \sin\theta\cdot\cos\varphi$$

$$\langle\sigma_y\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \sin\theta\cdot\sin\varphi$$



Etat superposé

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$



$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \langle\sigma_x\rangle \\ \langle\sigma_y\rangle \\ \langle\sigma_z\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

<u>Etat superposé:</u>

$$|r| \equiv \sqrt{\langle\sigma_x\rangle^2 + \langle\sigma_y\rangle^2 + \langle\sigma_z\rangle^2} = 1$$

Matrice densité d'un état superposé

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\varphi} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2}\cdot e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta\cdot e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\cdot e^{i\varphi} & 1-\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\rho = \frac{1}{2}\cdot\left(\mathbb{1} + \langle\sigma_x\rangle\sigma_x + \langle\sigma_y\rangle\sigma_y + \langle\sigma_z\rangle\sigma_z\right)}$$

<u>Etat pur:</u> $Tr(\rho) = 1$ $\qquad \rho^2 = \rho$

Cas général: états superposés et états mixtes

$$\boxed{\vec{\vec{\rho}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{\vec{1}} + \langle \sigma_x \rangle \vec{\vec{\sigma}}_x + \langle \sigma_y \rangle \vec{\vec{\sigma}}_y + \langle \sigma_z \rangle \vec{\vec{\sigma}}_z \right)}$$

$$Tr(\vec{\vec{\rho}}) = 1$$

$$\vec{\vec{\rho}}^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\left(1 + \langle \sigma_x \rangle^2 + \langle \sigma_y \rangle^2 + \langle \sigma_z \rangle^2 \right) \cdot \vec{\vec{1}} + 2 \left(\langle \sigma_x \rangle \vec{\vec{\sigma}}_x + \langle \sigma_y \rangle \vec{\vec{\sigma}}_y + \langle \sigma_z \rangle \vec{\vec{\sigma}}_z \right) \right)$$

$$Tr(\vec{\vec{\rho}}^2) = \frac{1 + |r|^2}{2}$$

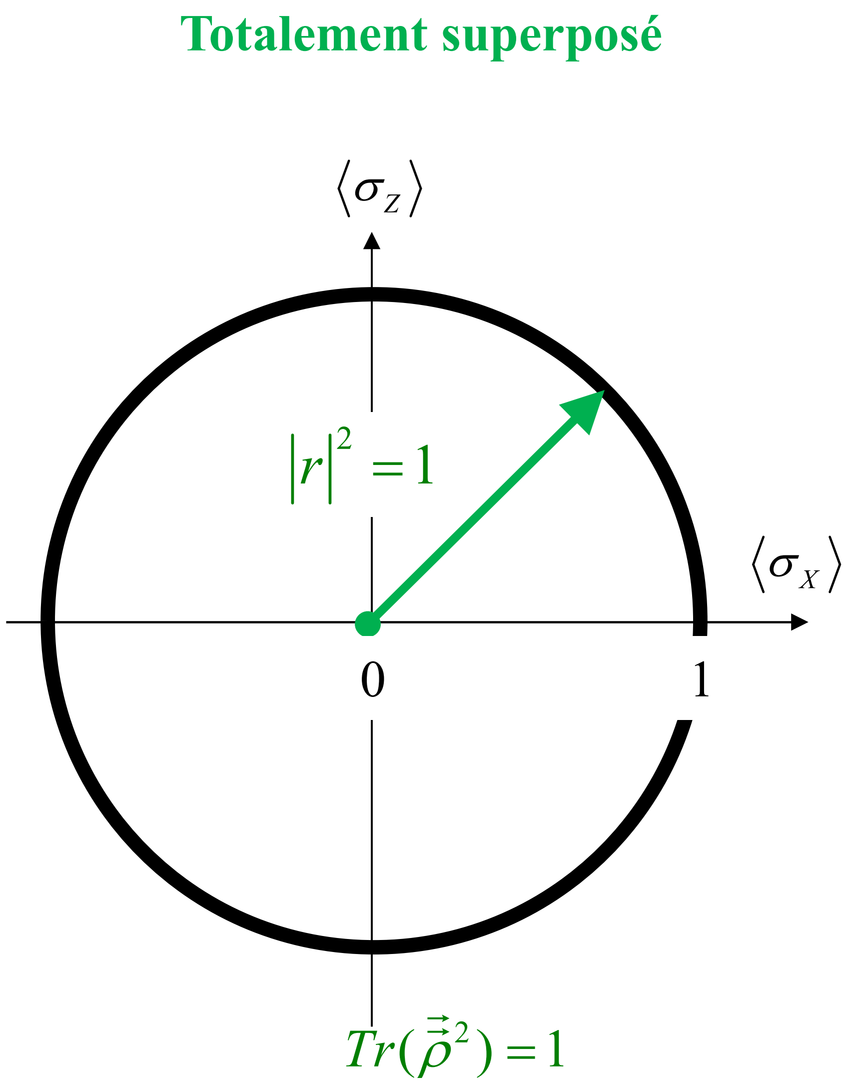
avec

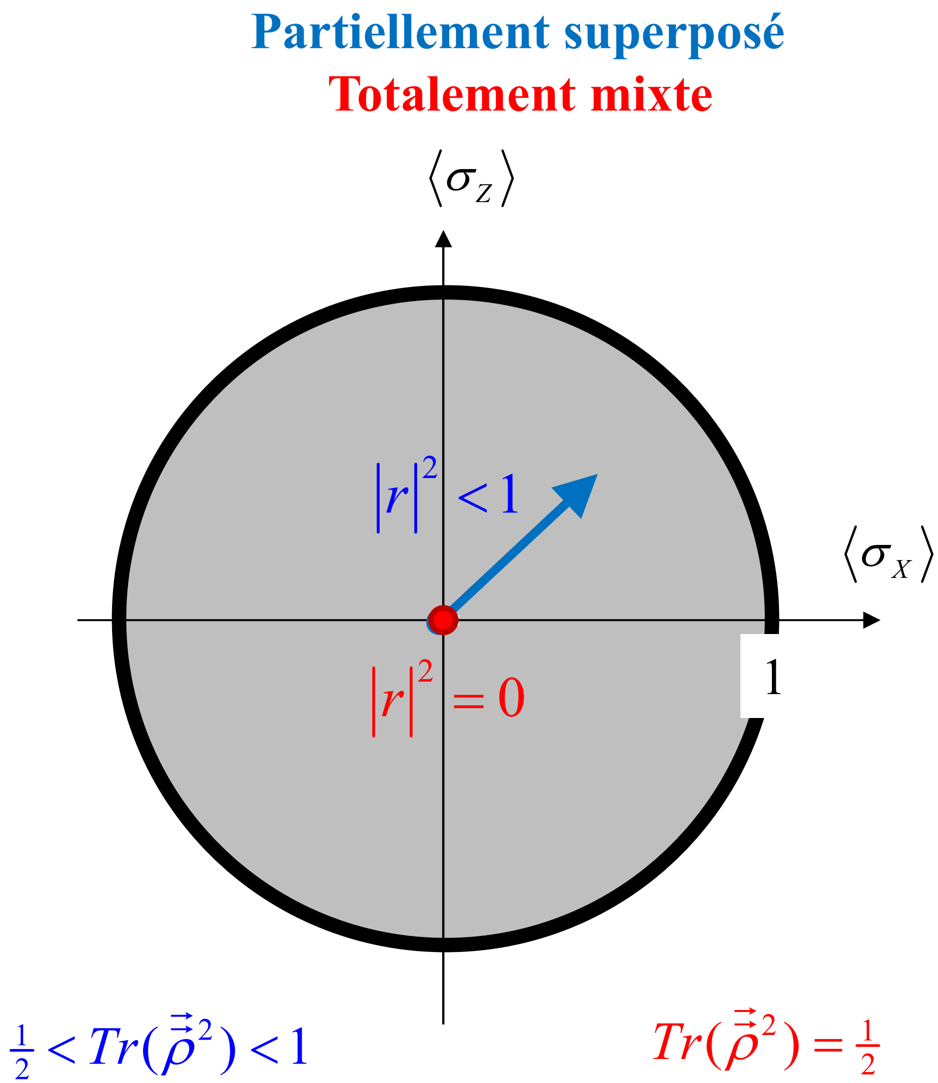
$|r|^2 = 1$ état totalement superposé

$|r|^2 < 1$ État partiellement superposé

$|r|^2 = 0$ état totalement mixte

Degré de superposition





Hamiltonien,

Propagateur et

fréquence de Larmor

Hamiltoniens et propagateurs

Hamiltonien général pour un single Qubit: (Matrice hermitienne 2x2)

$$H = \hbar\omega_m \cdot 1 + \frac{\hbar\Omega}{2}\cdot\left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z\right)$$

Energie commune

Propagateur général pour un single Qubit:

$$U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{-i\cdot\omega_m\cdot t}\cdot\underbrace{\left(\cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\cdot 1 + i\sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right)\cdot\left(n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z\right)\right)}$$

Phase commune

Rotation d'angle Ω de la sphère de Bloch autour de l'axe $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z \end{pmatrix}$

Exemple: Effet de la différence d'énergie

Hamiltonien: $$H = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \overline{E} \cdot 1 - \frac{\Delta E}{2} \cdot \sigma_z \qquad \overline{E} \equiv \frac{E_0 + E_1}{2} \qquad \Delta E \equiv E_1 - E_0$$

Rem: l'Hamiltonien correspond à l'énergie, c'est un «mesurable», il doit être hermitien (ses valeurs propres sont réelles)

Propagateur:

$$U(t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t} = e^{-i\cdot\frac{\overline{E}}{\hbar}t} \cdot \left(\cos\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right) \cdot 1 + i \sin\left(\frac{\Delta E}{2\hbar}t\right) \cdot \sigma_z \right) = e^{-i\frac{\overline{E}}{\hbar}t} \cdot \begin{pmatrix} e^{+i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\Delta E}{2\hbar}t} \end{pmatrix}$$

Rem: Le propagateur n'est pas toujours hermitien, ce n'est pas un «mesurable»

Fréquence de Larmor

Etat de départ $\left|\psi_{in}\right\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}$

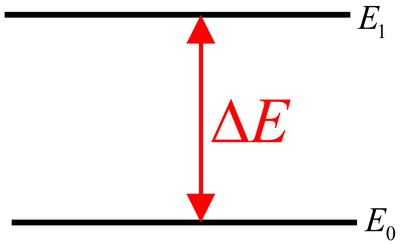
Evolution:

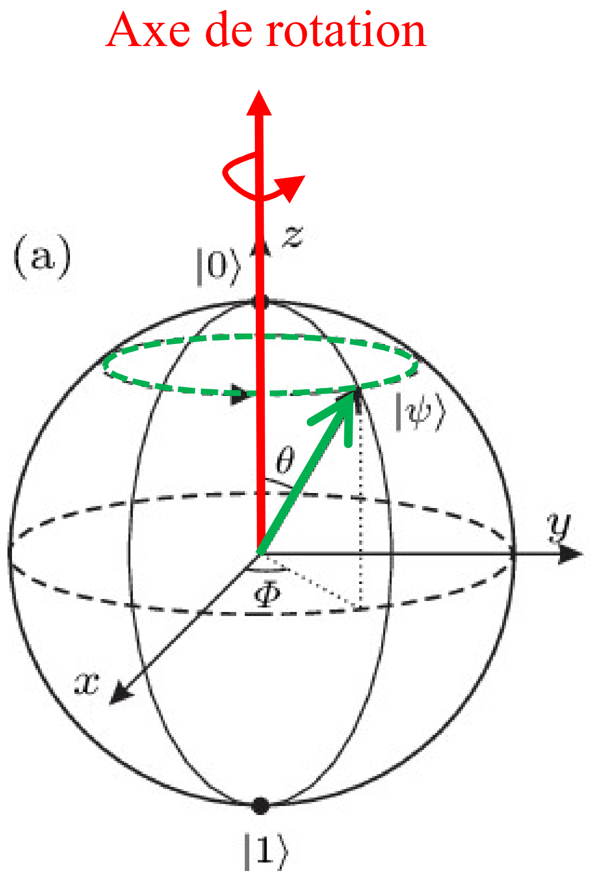
$$\left|\psi(t)\right\rangle = U(t)\cdot\left|\psi_{in}\right\rangle = e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2)\cdot e^{-i\cdot\Omega_L\cdot t} \end{pmatrix}$$

Rotation autour de l'axe Z

Fréquence de Larmor

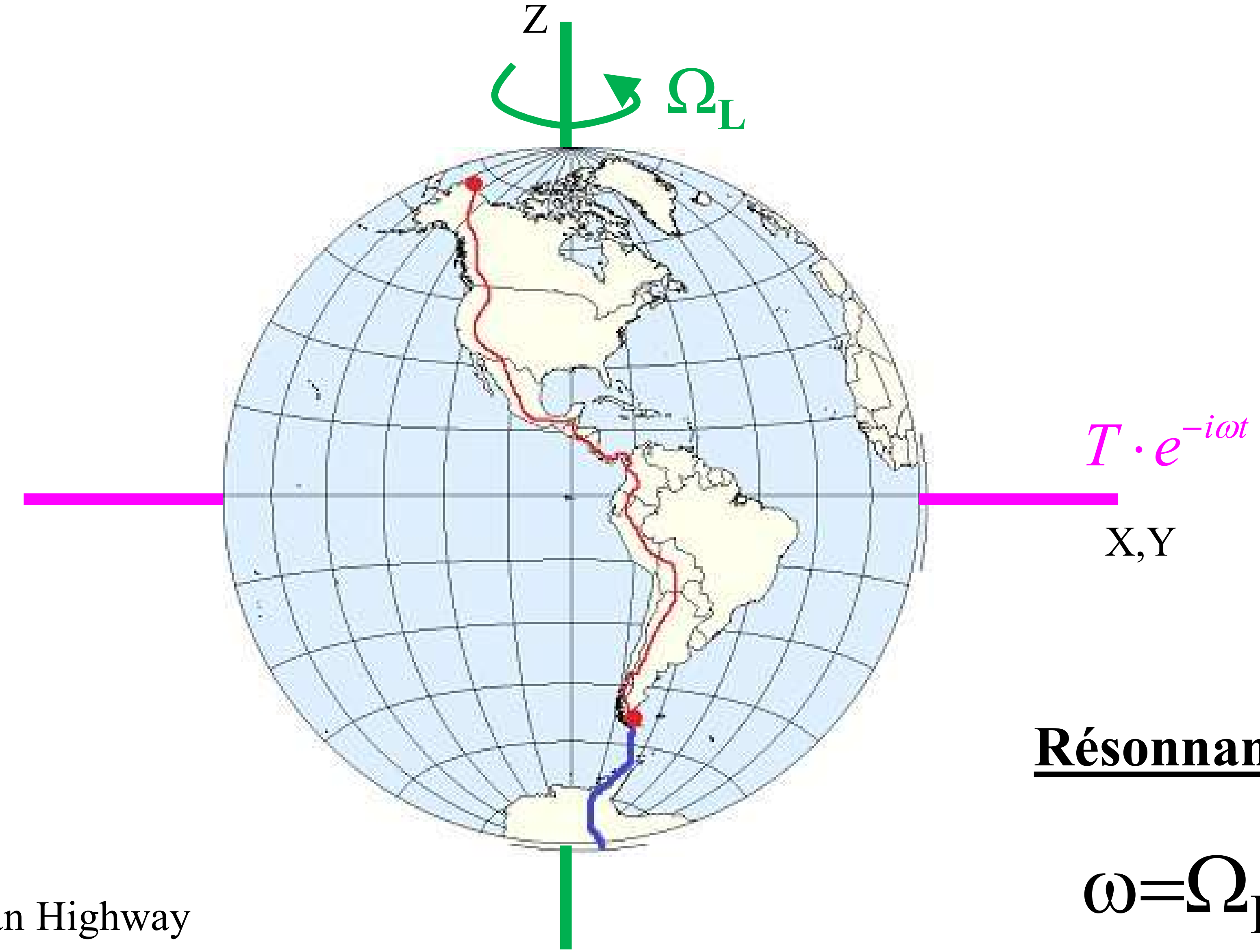
$$\Omega_L \equiv \frac{\Delta E}{\hbar}$$





Référentiel tournant et Fréquence de Rabi

Analogie: référentiel fixe / référentiel tournant



Résonnance

$$\omega = \Omega_L$$

Panamerican Highway

Couplage AC et référentiel tournant

Supposons: $$H = \begin{pmatrix} E_0 & -i\cdot T\sin(\omega t) \\ i\cdot T\sin(\omega t) & E_1 \end{pmatrix} = \bar{E}\cdot 1 - \frac{\Delta E}{2}\cdot\sigma_z + T\sin(\omega t)\cdot\sigma_y$$

<u>référentiel fixe</u> **<u>référentiel tournant à la fréquence d'excitation ω:</u>**

$$\left.\begin{aligned} &|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1\cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \\ &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H\cdot|\psi\rangle \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &|\bar{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\bar{\psi}\rangle = \bar{H}\cdot|\bar{\psi}\rangle \end{aligned}\right.$$

avec $$\boxed{\bar{H} = \begin{pmatrix} E_0 & -T/2 \\ -T/2 & E_1-\hbar\omega \end{pmatrix} = \left(E_0 + \frac{(\Delta E-\hbar\omega)}{2}\right)\cdot 1 - \frac{(\Delta E-\hbar\omega)}{2}\cdot\sigma_z - \frac{T}{2}\cdot\sigma_X}$$

Fréquence de Rabi

Dans le référentiel tournant

$$\boxed{\bar{H} = \left(E_0 + \frac{(\Delta E - \hbar\omega)}{2} \right) \cdot 1 - \frac{\hbar\Omega_R}{2} \cdot \left(\bar{n}_x \sigma_X + \bar{n}_z \sigma_z \right)}$$

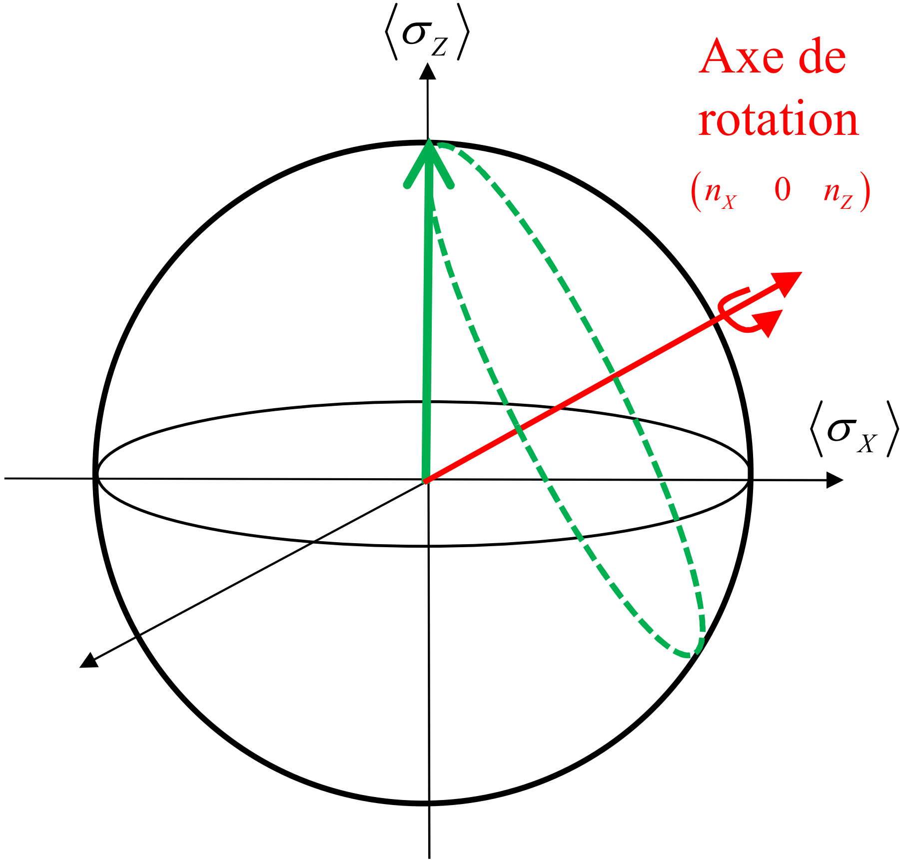
<u>Fréquence de Rabi:</u>

$$\boxed{\hbar\Omega_R \equiv \sqrt{(\Delta E - \hbar\omega)^2 + T^2}}$$

<u>Axe de rotation:</u>

Dans le référentiel tournant

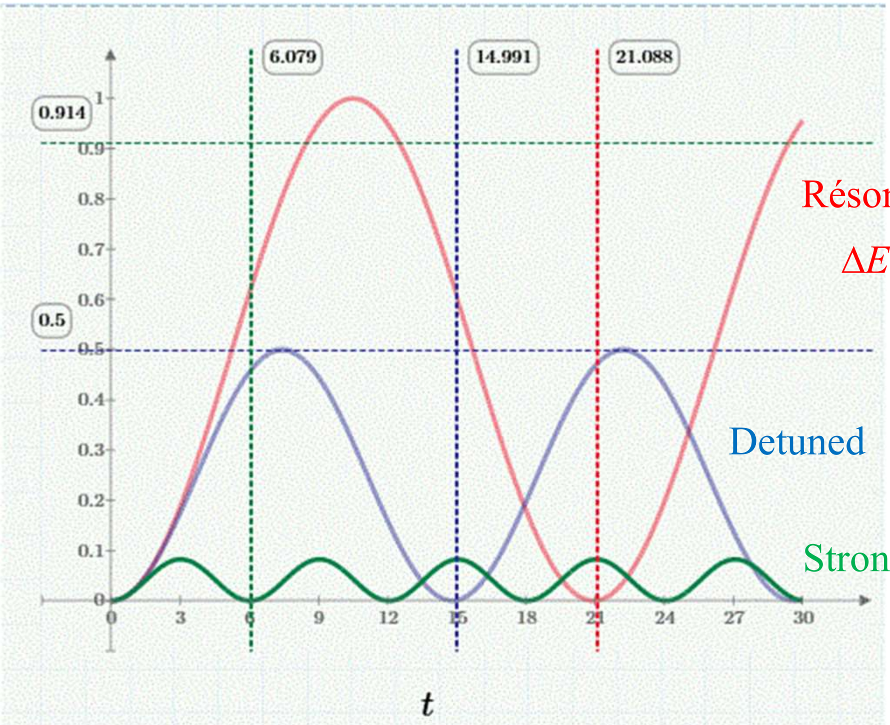
$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\bar{n}_x = \dfrac{T}{\hbar\Omega_R}} \\ \boxed{\bar{n}_y = 0} \\ \boxed{\bar{n}_z = \dfrac{\Delta E - \hbar\omega}{\hbar\Omega_R}} \end{array} \right.$$



Exemple: Oscillations de Rabi

Probabilité d'être dans l'état excité:

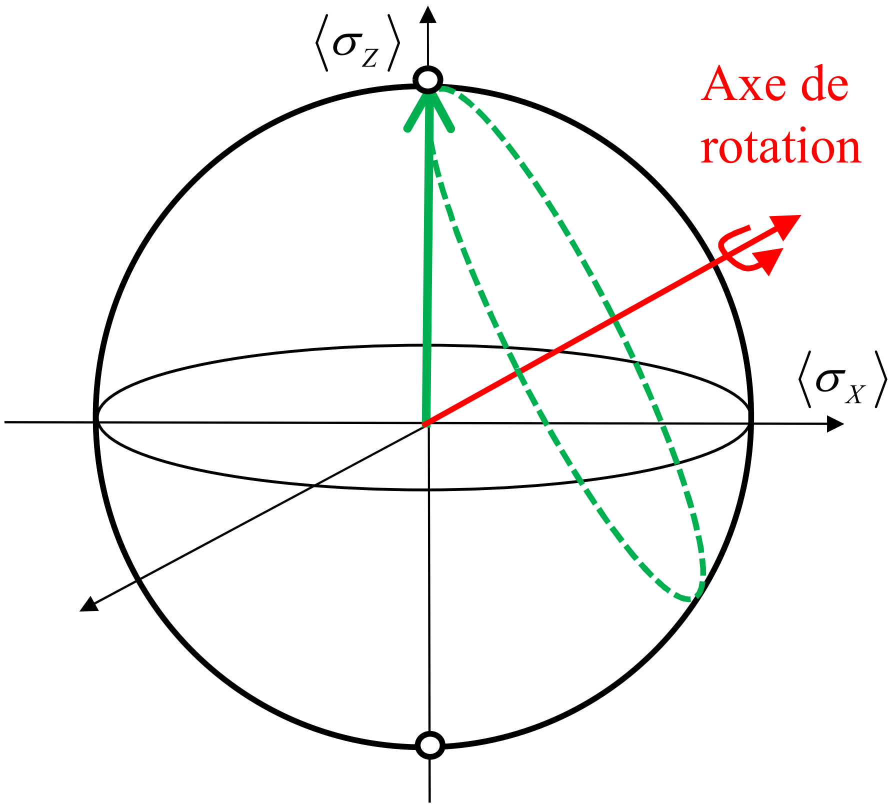
$$P_1(t) \equiv \left|\langle\varphi_1||\psi(t)\rangle\right|^2 = \left(\frac{T}{\hbar\Omega_R}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\Omega_R}{2}\cdot t\right) = \frac{1+\langle\sigma_Z\rangle}{2}$$



Résonnant $\Delta E = \hbar\omega$

Detuned $|\Delta E - \hbar\omega| > 0$

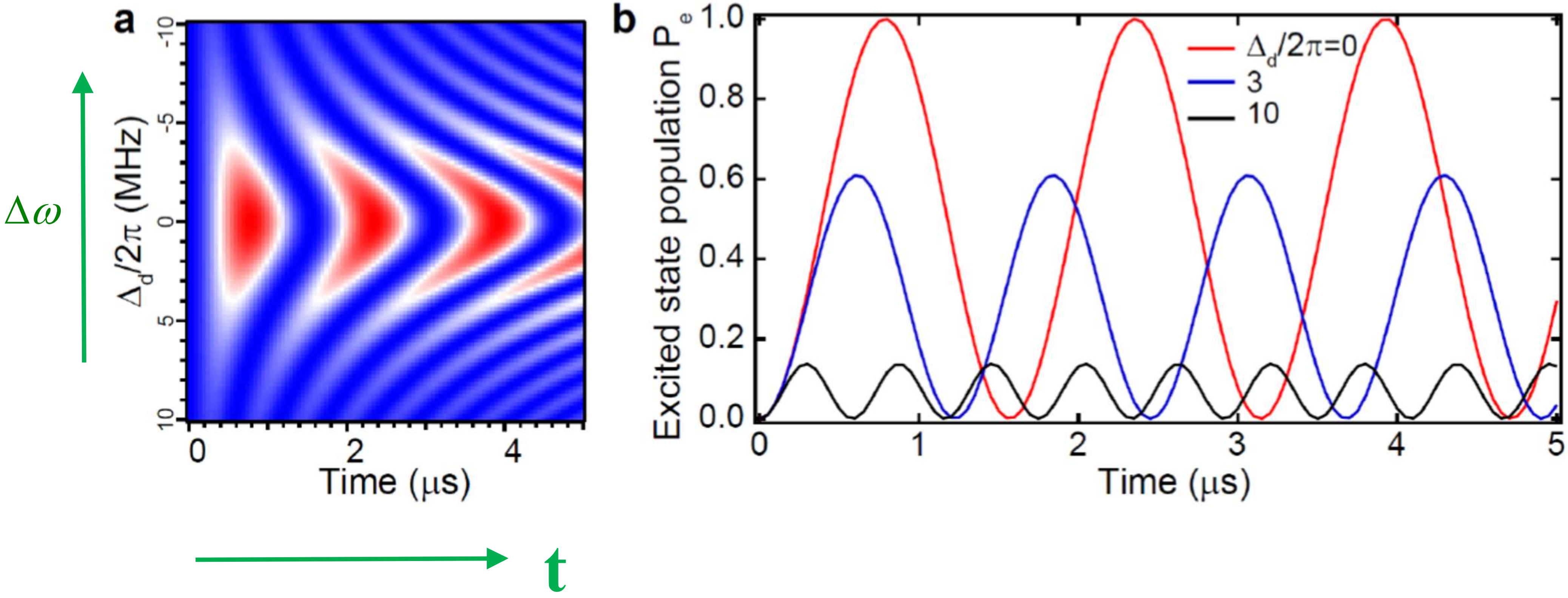
Strongly detuned $|\Delta E - \hbar\omega| \gg 0$



Fréquence de Rabi:
exemple d'un qubit supraconducteur

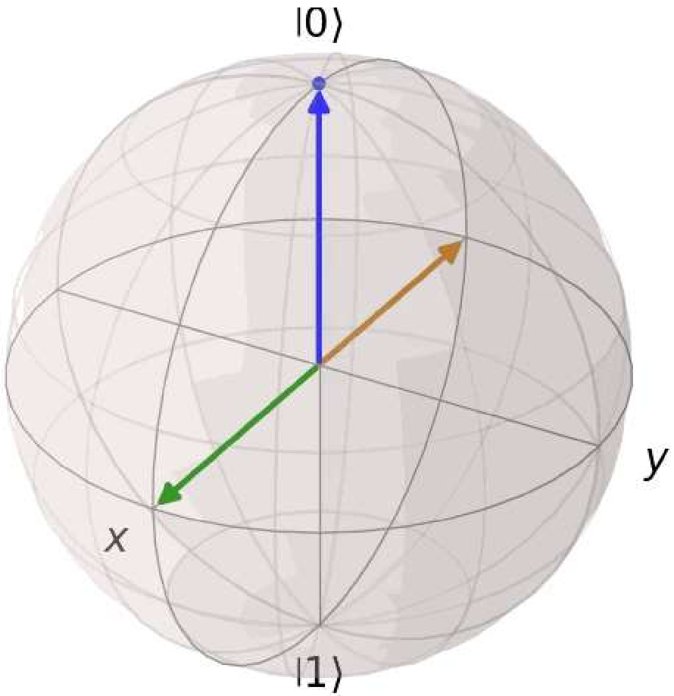
$$\Delta\omega \equiv \frac{\Delta E}{\hbar} - \omega$$

Chaque point de la figure correspond à une moyenne sur env. 10'000 mesures

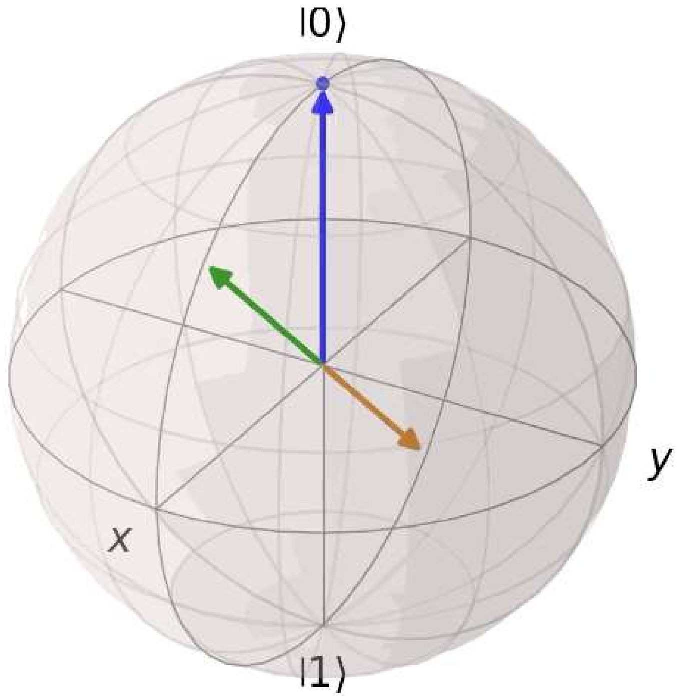


Fréquence de Rabi: Effet du detuning

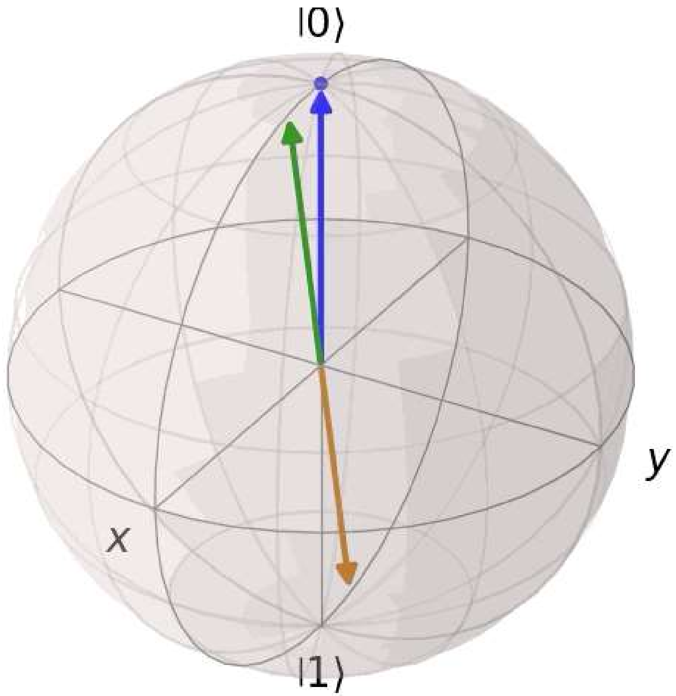
Résonnant



Detuned



Strongly detuned



Simulations par: Romain Nicolas Paul Couyoumtzelis

Paire de qubits

A) Etats produits
(produit tensoriel de vecteur)

B) Etats intriqués

PAB

Base commune aux deux qubits

Base «Alice»:

Base «Bob»:

$$|U\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |D\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Base commune, **produit tensoriel** des vecteurs des deux bases:

$$|Uu\rangle \equiv |U\rangle \otimes |u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |Ud\rangle \equiv |U\rangle \otimes |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |Du\rangle \equiv |D\rangle \otimes |u\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |Dd\rangle \equiv |D\rangle \otimes |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exemple spin Up /Down

Base «Alice»: $|U\rangle$ $|D\rangle$ Base «Bob»: $|u\rangle$ $|d\rangle$

Base commune: $|Uu\rangle$ $|Ud\rangle$ $|Du\rangle$ $|Dd\rangle$

Paire de qubits général:

$$|\psi\rangle = \chi_0|Uu\rangle + \chi_1|Ud\rangle + \chi_2|Du\rangle + \chi_3|Dd\rangle$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow |Uu\rangle \\ \leftarrow |Ud\rangle \\ \leftarrow |Du\rangle \\ \leftarrow |Dd\rangle \end{array}$$

A) Etat produit de deux Qubits

$$|\psi\rangle = \left(\alpha_0 |U\rangle + \alpha_1 |D\rangle\right) \otimes \left(\beta_0 |u\rangle + \beta_1 |d\rangle\right)$$

$$= \alpha_0\beta_0 |Uu\rangle + \alpha_0\beta_1 |Ud\rangle + \alpha_1\beta_0 |Du\rangle + \alpha_1\beta_1 |Dd\rangle$$

A) Etat produit

Alice

Bob

Etat produit

Produit tensoriel de vecteurs

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_i \\ \dots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$|B\rangle = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \dots \\ \beta_j \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$|\psi_p\rangle = |\psi_{i,j}\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_o \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \\ \dots \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \\ \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \dots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$i = 0,1,\dots(n-1)$

$j = 0,1,\dots(n-1)$

$p = 0,1,\dots(n^2-1)$

PAB

Exemple spin Up /Down

Mode Alice

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \alpha_0 \leftarrow |U\rangle \\ \alpha_1 \leftarrow |D\rangle \end{matrix}$$

Mode Bob

$$|B\rangle = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \beta_0 \leftarrow |u\rangle \\ \beta_1 \leftarrow |d\rangle \end{matrix}$$

Etat produit:

$$|\psi\rangle = (\alpha_0|U\rangle + \alpha_1|D\rangle) \otimes (\beta_0|u\rangle + \beta_1|d\rangle) = \alpha_0\beta_0|Uu\rangle + \alpha_0\beta_1|Ud\rangle + \alpha_1\beta_0|Du\rangle + \alpha_1\beta_1|Dd\rangle$$

$$|\psi_{ij}\rangle = |A\rangle \otimes |B\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_o \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \\ \alpha_1 \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_o \cdot \beta_0 \\ \alpha_o \cdot \beta_1 \\ \alpha_1 \cdot \beta_0 \\ \alpha_1 \cdot \beta_1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow |Uu\rangle \\ \leftarrow |Ud\rangle \\ \leftarrow |Du\rangle \\ \leftarrow |Dd\rangle \end{matrix}$$

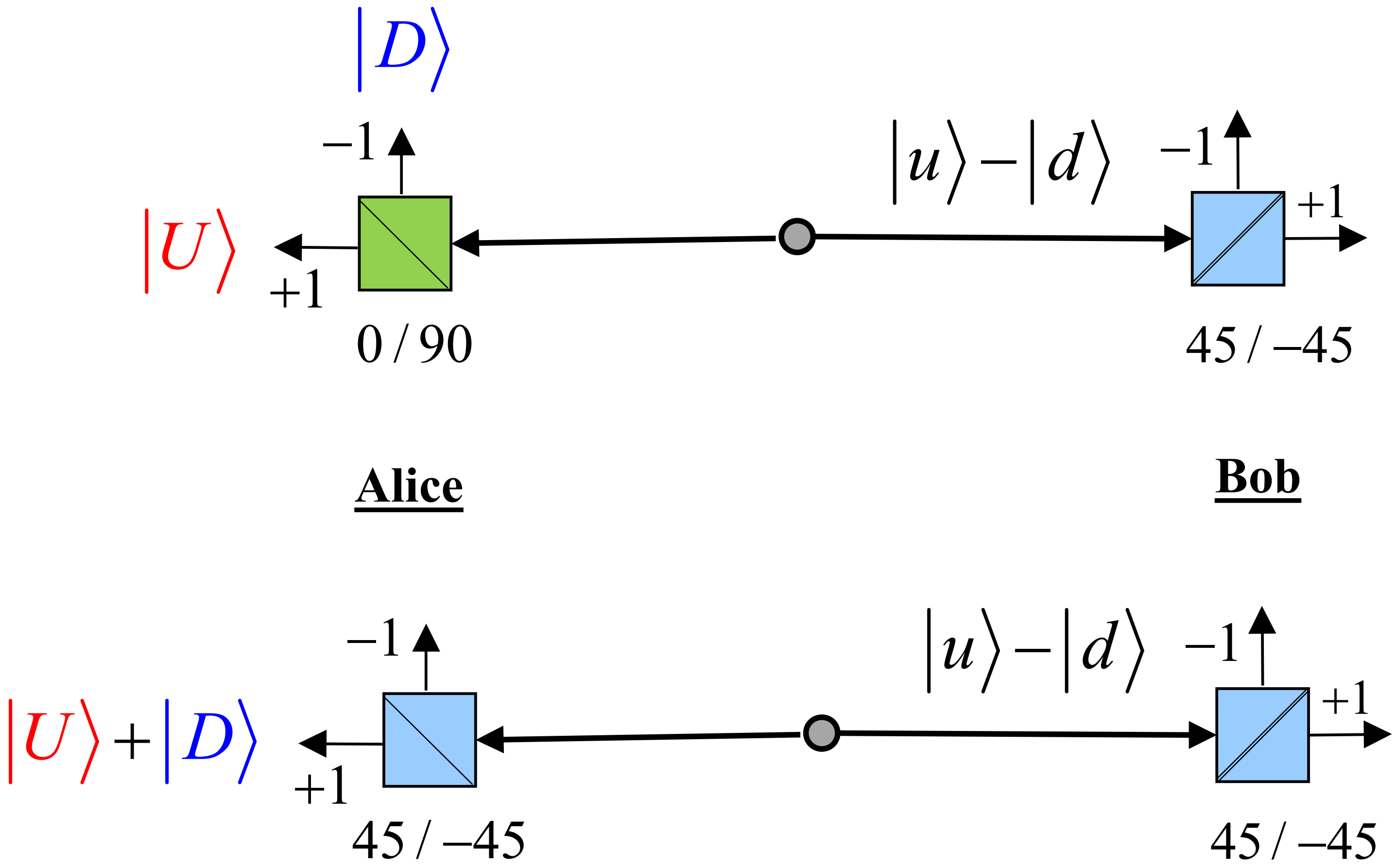
«produit tensoriel»

$i = 0,1$
$j = 0,1$

$p = 0,1,2,3$

Etat produit et décomposition en base d'Alice et Bob

$$\left(|U\rangle+|D\rangle\right)\otimes\left(|u\rangle-|d\rangle\right)=\left(|U\rangle\otimes\left(|u\rangle-|d\rangle\right)\right)+\left(|D\rangle\otimes\left(|u\rangle-|d\rangle\right)\right)\propto\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$



B) Paire de Qubits intriqués

$$|\psi\rangle \neq \left(\alpha_0 |U\rangle + \alpha_1 |D\rangle\right) \otimes \left(\beta_0 |u\rangle + \beta_1 |d\rangle\right)$$

Etats intriqués

Certains états ne peuvent pas s'écrire sous la forme d'un produit tensoriel d'un vecteur d'Alice et d'un vecteur de Bob

= Etat intriqués

Exemples: **Etats de Bell**

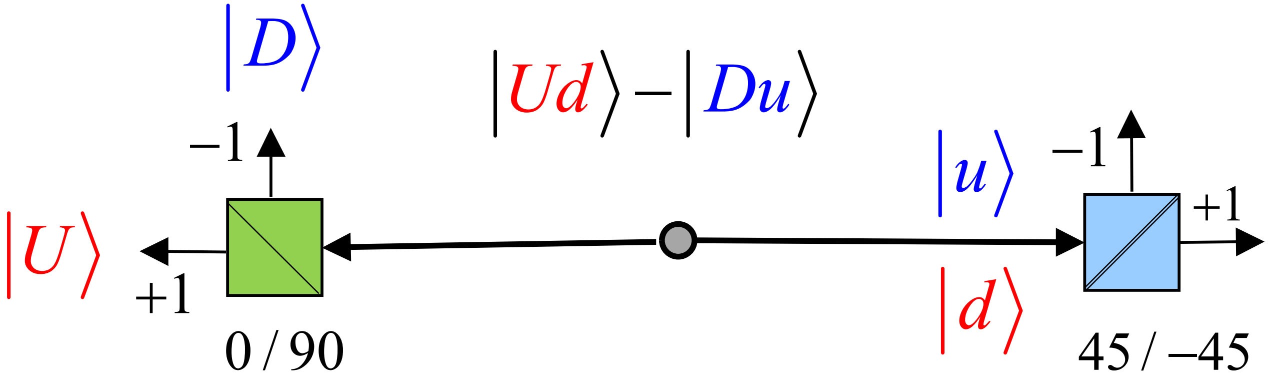
$$\frac{|U\rangle\otimes|d\rangle-|D\rangle\otimes|u\rangle}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_o\cdot\beta_0\\\alpha_o\cdot\beta_1\\\alpha_1\cdot\beta_0\\\alpha_1\cdot\beta_1\end{pmatrix}$$

$$\frac{|U\rangle\otimes|u\rangle+|D\rangle\otimes|d\rangle}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_o\cdot\beta_0\\\alpha_o\cdot\beta_1\\\alpha_1\cdot\beta_0\\\alpha_1\cdot\beta_1\end{pmatrix}$$

$$\frac{|U\rangle\otimes|d\rangle+|D\rangle\otimes|u\rangle}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_o\cdot\beta_0\\\alpha_o\cdot\beta_1\\\alpha_1\cdot\beta_0\\\alpha_1\cdot\beta_1\end{pmatrix}$$

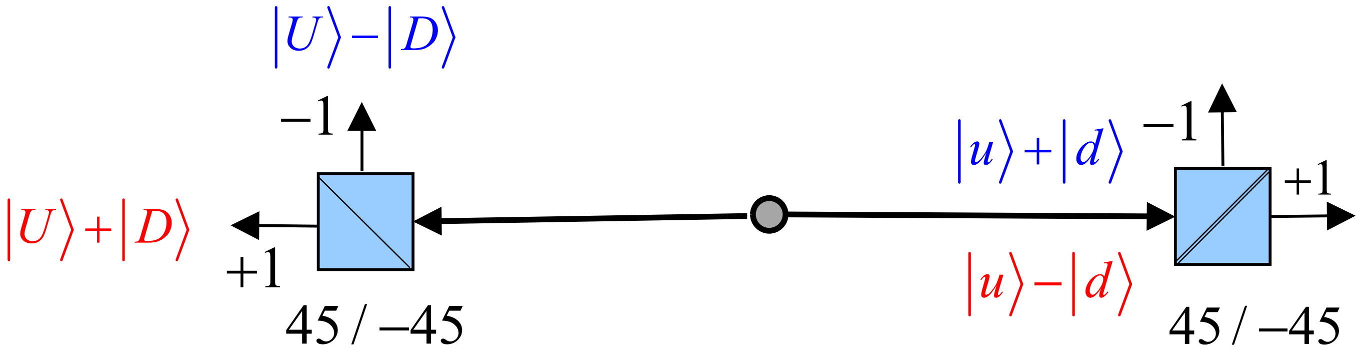
$$\frac{|U\rangle\otimes|u\rangle-|D\rangle\otimes|d\rangle}{\sqrt{2}}=\tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}\alpha_o\cdot\beta_0\\\alpha_o\cdot\beta_1\\\alpha_1\cdot\beta_0\\\alpha_1\cdot\beta_1\end{pmatrix}$$

Etat intriqué et décomposition en base d'Alice et Bob



Alice **Bob**

$$\left[|U\rangle - |D\rangle\right]\cdot\left[|u\rangle + |d\rangle\right] - \left[|U\rangle + |D\rangle\right]\cdot\left[|u\rangle - |d\rangle\right]$$



Conclusion

Pour les états produits

Les mesures d'Alice et de Bob ne s'influencent pas

En mesurant Alice projette sur son état à elle. Cela ne provoque aucune projection chez Bob

Pour les états intriqués

Les états sont globaux. Les mesures d'Alice projettent globalement et influencent donc instantanément les modes chez Bob.
Bob ne peut pas s'en apercevoir directement. Il faudra pour cela calculer les corrélations

Les mesures d'Alice influencent les modes de Bob

Mesures communes

(produit tensoriel de matrices)

Opérateur «produit»: produit tensoriel de matrices

$$O \equiv M \otimes N = \left(O_{i,j}\right) = \begin{pmatrix} M_{00}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{0j}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{0n}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} \\ M_{i0}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{ij}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{in}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} \\ M_{n0}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{n,j}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} & M_{nn}\begin{pmatrix} N_{00} & \cdots & N_{0n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ N_{n0} & \cdots & N_{nn} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

«produit tensoriel»

$$i = 0, \ldots (n^2 - 1)$$
$$j = 0, \ldots (n^2 - 1)$$

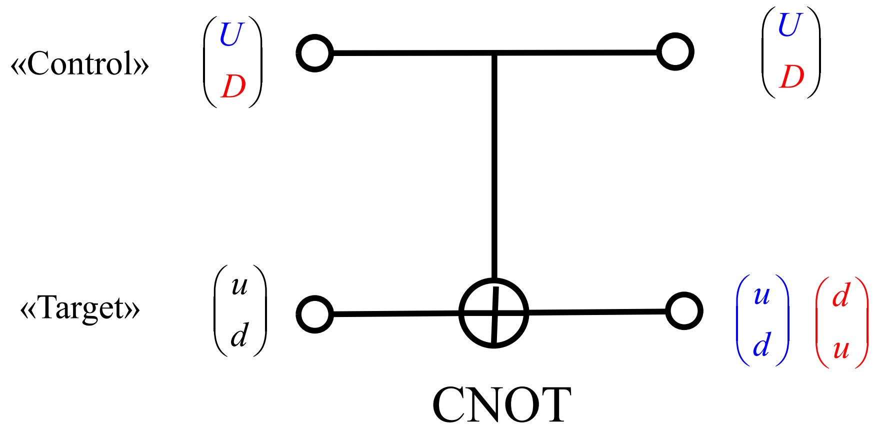
Opérateur «non-produit»

Exemple:

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq {\color{red}M} \otimes {\color{blue}N}$$

«control NOT»

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Uu \\ Ud \\ Du \\ Dd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Uu \\ Ud \\ D{\color{red}d} \\ D{\color{red}u} \end{pmatrix}$$



Exemple: spin Up/Down

$$O=\begin{pmatrix} M_{00}\begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} \\ N_{10} & N_{11} \end{pmatrix} & M_{01}\begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} \\ N_{10} & N_{11} \end{pmatrix} \\ M_{10}\begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} \\ N_{10} & N_{11} \end{pmatrix} & M_{11}\begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} \\ N_{10} & N_{11} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple:

<u>«corrélation»</u>

<u>Alice</u>

0 / 90

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\sigma_Z$$

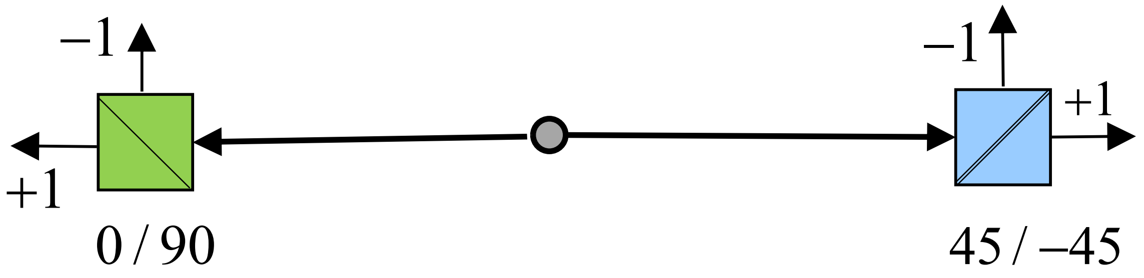
$$O=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Bob</u>

+45 / –45

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\sigma_X$$

Matrices de mesure et de corrélation: $1^{\text{ère}}$ expérience



Mesure chez Alice

$$M_{A1} \equiv \sigma_Z \otimes 1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrélation

$$M_{AB1} \equiv \sigma_Z \otimes \sigma_X$$

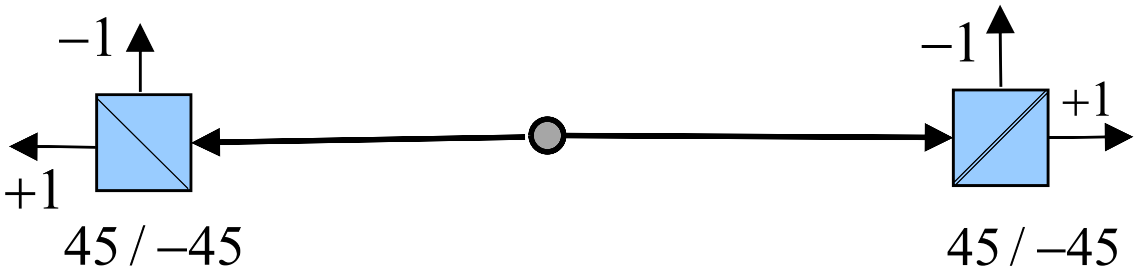
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mesure chez Bob

$$M_B \equiv 1 \otimes \sigma_X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice: Matrices de mesure et de corrélation, 2ème expérience



Mesure chez Alice

$$M_{A2} \equiv \sigma_X \otimes 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrélation

$$M_{AB2} \equiv \sigma_X \otimes \sigma_X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mesure chez Bob

$$M_B \equiv 1 \otimes \sigma_X$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

PAB

Moyennes et corrélation avec un état produit: exemple

Etat produit:

$$\left|\psi_{prod}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

1ère expérience: Alice 0/90, Bob 45/-45

$$\left\langle M_{A1}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{A1} \left|\psi_{prod}\right\rangle = 0$$

$$\left\langle M_{B}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{B} \left|\psi_{prod}\right\rangle = -1$$

$$\left\langle M_{AB1}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{AB1} \left|\psi_{prod}\right\rangle = 0$$

2ème expérience: Alice 45/-45, Bob 45/-45

$$\left\langle M_{A2}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{A2} \left|\psi_{prod}\right\rangle = 1$$

$$\left\langle M_{B}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{B} \left|\psi_{prod}\right\rangle = -1$$

$$\left\langle M_{AB2}\right\rangle = \left\langle \psi_{prod}\right| M_{AB2} \left|\psi_{prod}\right\rangle = -1$$

REM:

$$\boxed{\left\langle M_{AB}\right\rangle = \left\langle M_{A}\right\rangle \cdot \left\langle M_{B}\right\rangle}$$

Moyennes et corrélation avec un état intriqué: exercice

Etat intriqué:

$$\left|\psi_{\text{sing}}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etat «singulet» de Bell

1ère expérience: Alice 0/90, Bob 45/-45	2ème expérience: Alice 45/-45, Bob 45/-45
$\langle M_{A1}\rangle = 0$	$\langle M_{A2}\rangle = 0$
$\langle M_{B}\rangle = 0$	$\langle M_{B}\rangle = 0$
$\langle M_{AB1}\rangle = 0$	$\langle M_{AB2}\rangle = -1$

REM:

$$\boxed{\langle M_{AB}\rangle \neq \langle M_{A}\rangle \cdot \langle M_{B}\rangle}$$

Cas général avec l'état produit

Alice et Bob font leurs mesures avec un polarisateur à angle α resp. β.

Alice

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Bob

$$\sigma_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} & \sin(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \\ \sin(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} & -\cos(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Etat produit, exemple

$$\left|\psi_{prod}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle M_A \right\rangle = \sin(2\alpha) \qquad \left\langle M_B \right\rangle = -\sin(2\beta)$$

Corrélation

$$\boxed{\left\langle M_{AB} \right\rangle = -\sin(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = \left\langle M_A \right\rangle \cdot \left\langle M_B \right\rangle}$$

Cas général avec l'état «singulet»

Alice et Bob font leurs mesures avec un polarisateur à angle α resp. β.

Alice

$$\sigma_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}$$

Bob

$$\sigma_\beta = \begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix}$$

$$M_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} & \sin(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \\ \sin(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} & -\cos(2\alpha)\begin{pmatrix} \cos(2\beta) & \sin(2\beta) \\ \sin(2\beta) & -\cos(2\beta) \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Etat «singulet»

$$|\psi_{\text{sing}}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\langle M_A \rangle = 0} \qquad \boxed{\langle M_B \rangle = 0}$$

Corrélation

$$\boxed{\langle M_{AB} \rangle = -\cos\left(2(\alpha-\beta)\right)}$$

Exercices

Exercice 9.1: Base commune Alice-Bob-Charlie

Base commune: $\left|h_{ijk}\right\rangle \equiv \left|h_p\right\rangle = \left|e_i\right\rangle \otimes \left|f_j\right\rangle \otimes \left|g_k\right\rangle \qquad p = 0, \ldots ?$

Exemple: spin Up/Down

Base «Alice»:

$\left|U\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|D\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base «Bob»:

$\left|u\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|d\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base «Charlie»:

$\left|\uparrow\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\downarrow\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Base commune:

?

Etat produit

$$\left|\psi_{i,j,k}\right\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}$$

Exercice 9.2: opérateur produit entre Alice, Bob et Charlie

$$O = M \otimes N \otimes L$$

Alice

$$M = \begin{pmatrix} M_{00} & M_{01} \\ M_{10} & M_{11} \end{pmatrix}$$

Bob

$$N = \begin{pmatrix} N_{00} & N_{01} \\ N_{10} & N_{11} \end{pmatrix}$$

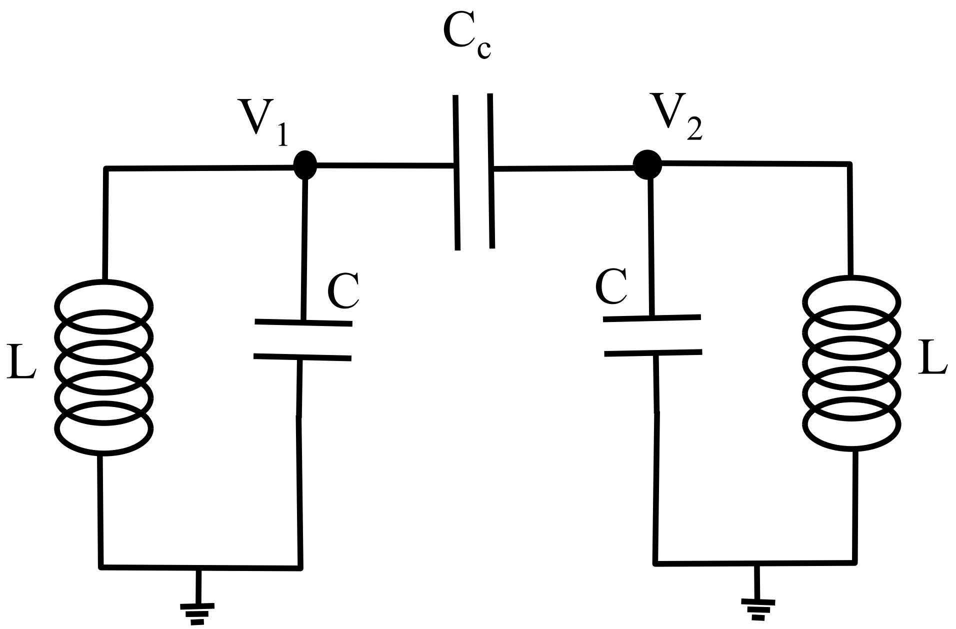
Charlie

$$L = \begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} \\ L_{10} & L_{11} \end{pmatrix}$$

$$O = \text{?}$$

Exercice 9.3:
Hamiltonien de couplage iSWAP

$$H_c \approx -T \cdot \left(a_{1+} a_{2-} + a_{1-} a_{2+} \right)$$



Reprenons l'exercice 8.3:
Considérez seulement deux modes dans chaque résonateur (2 qubits)

Exprimez l'opérateur H_c sous forme matricielle

Exercice 9.4: singulet / triplet

Supposons une énergie d'interaction de la forme «spin-spin» entre deux qubits:

$$H \approx \vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_2 \approx \sigma_{1x} \otimes \sigma_{2x} + \sigma_{1y} \otimes \sigma_{2y} + \sigma_{1z} \otimes \sigma_{2z}$$

1) Exprimez H sous la forme d'une matrice 4x4

2) Montrez que les états de Bell sont les modes propres de cet Hamiltonien.
Quelles sont les valeurs propres correspondantes ?

Exercice 9.5:
Etats de Bell

Montrez que les états de Bell ne sont pas des états produits

$$\left|\varphi_{t1}\right\rangle \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq A \otimes B \qquad \left|\varphi_{t2}\right\rangle \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq A \otimes B \qquad \left|\varphi_{t3}\right\rangle \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq A \otimes B \qquad \left|\varphi_{s}\right\rangle \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \neq A \otimes B$$

PAB

Exercice 9.6

Montrez que ces opérateurs ne sont pas des opérateurs «produit»

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq M \otimes N$$

$$H_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq M \otimes N$$

$$\vec{\sigma}_1 \otimes \vec{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq M \otimes N$$